МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

1. Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(x-\ln\operatorname{ch}x\Big)\,.$$

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость при всех значениях параметра $\alpha\in\mathbb{R}$ несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha\sin\left(e^x\right)\,dx\,.$$

3. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sin k}{k+\sin x}$$

на множестве $x\in\mathbb{R}$.

4. Функцию $f(x,y)=|xy|$ исследовать на дифференцируемость в $\mathbb{R}^2$.

5. Для задачи на условный экстремум функции $f(x,y)=x^2+y$ при условии $x+y^2=\frac{3}{4}$ найти стационарные точки функции Лагранжа и проверить в них достаточные условия локального условного экстремума второго порядка.

6. Вычислить поверхностный интеграл

$$\int\limits_S z\,dS,$$

где поверхность $S=\Big\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;\Big|\;x\ge0,\;y\ge0,\;z=x^2+y^2\le1\,\Big\}$.

7. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(2x+1)y''(x)+4xy'(x)-4y(x)=0$$

на множестве $x>0$.

8. Пусть $\mathcal{E}$ — вещественное евклидово пространство многочленов степени не выше второй со скалярным произведением $\langle x,y\rangle=\int\limits_0^1 x(t)y(t)\,dt$. Вычислить расстояние в $\mathcal{E}$ от многочлена $x(t)=t^2$ до подпространства M всех многочленов степени не выше первой.

9. Применяя теорию вычетов, найти интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\sin\frac{1}{z}}\,.$$

10. Решить задачу Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$

$$u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+ty^2,\quad t>0,$$

$$u|_{t=0}=x^2y,\qquad u_t|_{t=0}=xy\,.$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

1. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right).$$

2. Исследовать на сходимость при всех значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^\alpha}\,dx\,.$$

3. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{k}}{x+k}$$

на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,+\infty)$.

4. Функцию $f(x,y) = |y|\sin x$ исследовать на дифференцируемость в $\mathbb{R}^2$.

5. Для задачи на условный экстремум функции $f(x,y) = x^2 + y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$ найти стационарные точки функции Лагранжа и проверить в них достаточные условия локального условного экстремума второго порядка.

6. Вычислить поверхностный интеграл

$$\int\limits_S xy\,dS,$$

где поверхность $S = \left\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ z^2 = x^2+y^2 \leq 1\ \right\}$.

7. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2y''(x)\ln x - xy'(x) + y(x) = 0$$

на множестве $x \in (0,1)$.

8. В двумерном вещественном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ базис $e = \{\,e_1\,,\,e_2\,\}$ имеет матрицу Грама $\varGamma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, подпространство $M = \operatorname{Lin}\{e_1 - e_2\}$. Найти базис в ортогональном дополнении $M^\perp$ и матрицу преобразования ортогонального проектирования на M в базисе e.

9. Применяя теорию вычетов, найти интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{z\,dz}{\left(\cos\frac{1}{z}\right)^2}\,.$$

10. Решить задачу Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + tx^2, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = y^2, \qquad u_t|_{t=0} = 0\,.$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

1. Вычислить предел
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}\,.$$

2. Исследовать на сходимость при всех значениях параметра $\alpha\in\mathbb{R}$ несобственный интеграл
$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x-\sin x}{x^\alpha}\,dx\,.$$

3. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x+k^2}{x+2^k}$$
на множествах $E_1=(0,1)$ и $E_2=(1,+\infty)$.

4. Функцию $f(x,y)=x|y|$ исследовать на дифференцируемость в $\mathbb{R}^2$.

5. Для задачи на условный экстремум функции $f(x,y)=x^2+y$ при условии $x^2+y^2=1$ найти стационарные точки функции Лагранжа и проверить в них достаточные условия локального условного экстремума второго порядка.

6. Вычислить поверхностный интеграл
$$\int\limits_S z\,dS,$$
где поверхность $S=\left\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ z^2=x^2+y^2\leq 1\,\right\}$.

7. Найти общее решение дифференциального уравнения
$$y''(x)-y(x)=\sin x$$
на множестве $x\in\mathbb{R}$.

8. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования двумерного линейного пространства L, матрица которого в базисе $\{e_1,e_2\}$ имеет вид $\begin{pmatrix}1&4\\1&1\end{pmatrix}$.

9. Применяя теорию вычетов, найти интеграл
$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{z\,dz}{z+1}\,.$$

10. Решить задачу Коши
$$u_{xy}=1,\quad x\in\mathbb{R},\quad y\in\mathbb{R},$$
$$u|_{x=y}=x,\qquad u_y|_{x=y}=0\,.$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

2. Исследовать на сходимость при всех значениях параметра $\alpha \neq 0$ несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{(\ln x)^{\frac{1}{\alpha}}}{1-x^\alpha}\,dx\,.$$

3. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^x}{k+x^k}$ на множествах $x\in(1,2)$, $x\in(2,3)$ и $x\in(3,+\infty)$.

4. Функцию $f(x,y)=\begin{cases}\frac{(xy)^2}{|x|+|y|}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ исследовать на дифференцируемость в $\mathbb{R}^2$.

5. Для задачи на условный экстремум функции $f(x,y)=x^2+y^3$ при условии $x+y^2=\frac{1}{4}$ найти стационарные точки функции Лагранжа и проверить в них достаточные условия локального условного экстремума второго порядка.

6. Применяя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл

$$\oint\limits_L x^2\,dz,$$

где кривая $L=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{rcl}1&=&y^2+z^2,\\ 1&=&x+y+z\end{array}\right\}$ ориентирована положительно относительно вектора $(1,0,0)$.

7. Решить задачу Коши $\quad y(x)y''(x)=y'(x)\Big(y'(x)+1\Big),\quad y(0)=1,\quad y'(0)=2.$

8. В трёхмерном вещественном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом $e=\{e_1\,,\,e_2\,,\,e_3\}$ задано подпространство $M=\mathrm{Lin}\{e_1+e_2-e_3\,,\,e_1-2e_2\}$. Найти базис в ортогональном дополнении $M^\perp$. Найти ортонормированный базис в M. Найти общий вид линейного преобразования пространства $\mathcal{E}$, ядро которого совпадает с M.

9. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\mathrm{Ln}\,z$ в комплексной плоскости с разрезом по вещественному лучу $[0,+\infty)$, такая, что $f(i)=\frac{\pi}{2}i$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_C\frac{f(z)}{\sin(\pi z)}\,dz\,,$$

где окружность $C=\left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\;|z+1|=\frac{1}{2}\right\}$ ориентирована против часовой стрелки.

10. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t=u_{xx}+u_{yy}+t\sin(x-y),\quad t>0,\quad x\in\mathbb{R},\quad y\in\mathbb{R},$$

$$u|_{t=0}=x^2,\quad x\in\mathbb{R},\quad y\in\mathbb{R}.$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

1. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\ln(\cos x) + x\sin x}{\sqrt[3]{1+x^4} - \sqrt{1-x^4}}.$$

2. Исследовать на сходимость при всех значениях параметра $\alpha \neq 0$ несобственный интеграл

$$\int_0^1 \left(-\frac{x}{\ln x}\right)^{\alpha} dx.$$

3. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x+\sqrt{k}}{x+k^2}$$

на множествах $x \in (0,1)$, $x \in (1,+\infty)$.

4. Пусть $\mathcal{L}$ — линейное пространство вещественных многочленов степени не выше первой. Пусть $\mathcal{A}$ — линейное преобразование пространства $\mathcal{L}$ вида

$$(\mathcal{A}x)(t) = x(0)t + x(1) \quad \forall\, x \in \mathcal{L}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Найти обратное преобразование $\mathcal{A}^{-1}$.

5. В двумерном вещественном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом $e = \{\, e_1\,, e_2 \,\}$ самосопряженное преобразование $\mathcal{A}$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу перехода к ортонормированному базису в $\mathcal{E}$, в котором матрица преобразования $\mathcal{A}$ имеет диагональный вид, вычислить матрицу преобразования $\mathcal{A}$ в этом базисе.

6. Функцию $f(x,y) = |x|y$ исследовать на дифференцируемость в $\mathbb{R}^2$.

7. Для задачи на условный экстремум функции $f(x,y) = 2x + y$ при условии $x^2 - y^2 = 1$ найти стационарные точки функции Лагранжа и проверить в них достаточные условия локального условного экстремума второго порядка.

8. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_G x\, dx\, dy,$$

где область $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x\ + y & > & 1, \\ x^2 + y & < & 1 \end{array} \right\}.$

9. Решить задачу Коши

$$y''(x) = y(x)\, y'(x), \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = \frac{1}{2}.$$

10. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-|x|}$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

О Т В Е Т Ы

1. Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(x-\ln\operatorname{ch}x\Big)\,.$$

Ответ: $\ln 2$.

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость при всех значениях параметра $\alpha\in\mathbb{R}$ несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha}\sin\left(e^{x}\right)\,dx\,.$$

Ответ: $\alpha\in\left\{\begin{array}{lll}(-\infty,-1] & - & \text{расходится,}\\ (-1,+\infty) & - & \text{сходится условно.}\end{array}\right.$

3. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sin k}{k+\sin x}$$

на множестве $x\in\mathbb{R}$.

Ответ: сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

4. Функцию $f(x,y)=|xy|$ исследовать на дифференцируемость в $\mathbb{R}^2$.

Ответ: f дифференцируема в $(0,0)$ и (x_0,y_0) при $x_0y_0\neq 0$, недифференцируема в $(x_1,0)$ и $(0,y_1)$ при $x_1y_1\neq 0$.

5. Для задачи на условный экстремум функции $f(x,y)=x^2+y$ при условии $x+y^2=\frac{3}{4}$ найти стационарные точки функции Лагранжа и проверить в них достаточные условия локального условного экстремума второго порядка.

Ответ:
$\lambda=-1,\quad x=\frac{1}{2},\quad y=\frac{1}{2}$ — не выполнено достаточное условие локального экстремума второго порядка,
$\lambda=\frac{1}{2},\quad x=-\frac{1}{4},\quad y=-1$ — локальный минимум.

6. Вычислить поверхностный интеграл

$$\int\limits_S z\,dS,$$

где поверхность $S=\left\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z=x^2+y^2\leq 1\ \right\}$.

Ответ: $\frac{\pi}{48}\left(5\sqrt{5}+\frac{1}{5}\right)$.

7. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(2x+1)y''(x) + 4xy'(x) - 4y(x) = 0$$

на множестве $x > 0$.

Ответ: $y(x) = C_1 x + C_2 e^{-2x}$.

8. Пусть $\mathcal{E}$ — вещественное евклидово пространство многочленов степени не выше второй со скалярным произведением $\langle x, y\rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)\,dt$. Вычислить расстояние в $\mathcal{E}$ от многочлена $x(t) = t^2$ до подпространства M всех многочленов степени не выше первой.

Ответ: $\frac{1}{6\sqrt{5}}$.

9. Применяя теорию вычетов, найти интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\sin\frac{1}{z}}\,.$$

Ответ: $\frac{\pi i}{3}$.

10. Решить задачу Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + ty^2, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = x^2 y, \qquad u_t|_{t=0} = xy\,.$$

Ответ: $u(t,x,y) = \frac{t^3y^2}{6} + \frac{t^5}{60} + x^2y + t^2y + txy$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

О Т В Е Т Ы

1. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right).$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

2. Исследовать на сходимость при всех значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^\alpha}\,dx\,.$$

Ответ: сходится при $\alpha \in (2,4)$.

3. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{k}}{x+k}$$

на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,+\infty)$.

Ответ: сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2.

4. Функцию $f(x,y) = |y|\sin x$ исследовать на дифференцируемость в $\mathbb{R}^2$.

Ответ: дифференцируема в $\mathbb{R}^2 \setminus \{\,(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\,\}$ и в $(\pi k, 0)$ для $k \in \mathbb{Z}$.

5. Для задачи на условный экстремум функции $f(x,y) = x^2 + y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$ найти стационарные точки функции Лагранжа и проверить в них достаточные условия локального условного экстремума второго порядка.

Ответ: $(0,\pm 1)$ – локальный минимум, $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ – локальный максимум.

6. Вычислить поверхностный интеграл

$$\int\limits_S xy\,dS,$$

где поверхность $S = \left\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ z^2 = x^2 + y^2 \le 1 \,\right\}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

7. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2 y''(x) \ln x - x y'(x) + y(x) = 0$$

на множестве $x \in (0,1)$.

Ответ: $C_1\, x + C_2\,(1 + \ln x)$.

8. В двумерном вещественном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ базис $e = \{\, e_1\,,\, e_2 \,\}$ имеет матрицу Грама $\varGamma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, подпространство $M = \mathrm{Lin}\{e_1 - e_2\}$. Найти базис в ортогональном дополнении $M^\perp$ и матрицу преобразования ортогонального проектирования на M в базисе e.

Ответ: $M^\perp = \mathrm{Lin}\, 3e_1 + 2e_2, \quad P_M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$

9. Применяя теорию вычетов, найти интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{z\,dz}{\left(\cos\frac{1}{z}\right)^2}\ .$$

Ответ: $2\pi i.$

10. Решить задачу Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + tx^2, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = y^2, \qquad u_t|_{t=0} = 0\,.$$

Ответ: $u(t,x,y) = \frac{t^3x^2}{6} + \frac{t^5}{60} + y^2 + t^2.$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

О Т В Е Т Ы

1. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}\,.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}\,.$

2. Исследовать на сходимость при всех значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^\alpha}\,dx\,.$$

Ответ: сходится при $\alpha \in (2, 4)$.

3. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x + k^2}{x + 2^k}$$

на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$.

Ответ: сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2.

4. Функцию $f(x, y) = x|y|$ исследовать на дифференцируемость в $\mathbb{R}^2$.

Ответ: дифференцируема в $\mathbb{R}^2 \setminus \{\ (x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\ \}$ и в $(0, 0)$.

5. Для задачи на условный экстремум функции $f(x, y) = x^2 + y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$ найти стационарные точки функции Лагранжа и проверить в них достаточные условия локального условного экстремума второго порядка.

Ответ: $(0, \pm 1)$ – локальный минимум, $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ – локальный максимум.

6. Вычислить поверхностный интеграл

$$\int\limits_S z\,dS,$$

где поверхность $S = \left\{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ \middle|\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ z^2 = x^2 + y^2 \leq 1\ \right\}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\,.$

7. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''(x) - y(x) = \sin x$$

на множестве $x \in \mathbb{R}$.

Ответ: $C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{\sin x}{2}\,.$

8. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования двумерного линейного пространства L, матрица которого в базисе $\{e_1, e_2\}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\lambda_1 = -1, \quad v_1 = 2e_1 - e_2, \quad \lambda_2 = 3, \quad v_2 = 2e_1 + e_2\,.$

9. Применяя теорию вычетов, найти интеграл

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z\,dz}{z+1}\,.$$

Ответ: $-2\pi i\,.$

10. Решить задачу Коши

$$u_{xy} = 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R},$$

$$u|_{x=y} = x, \qquad u_y|_{x=y} = 0\,.$$

Ответ: $u(x,y) = x + xy - \frac{x^2+y^2}{2}\,.$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

О Т В Е Т Ы

1. Вычислить предел $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

2. Исследовать на сходимость при всех значениях параметра $\alpha \neq 0$ несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^{\frac{1}{\alpha}}}{1-x^\alpha}\,dx\,.$$

Ответ: $\alpha > 1$ — сходится, $\alpha < 0$ и $\alpha \in (0,1]$ — расходится.

3. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^x}{k+x^k}$ на множествах $x \in (1,2)$, $x \in (2,3)$ и $x \in (3,+\infty)$.

Ответ: при $x \in (1,2)$ и $x \in (3,+\infty)$ сходится неравномерно, при $x \in (2,3)$ сходится равномерно.

4. Функцию $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(xy)^2}{|x|+|y|}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$ исследовать на дифференцируемость в $\mathbb{R}^2$.

Ответ: дифференцируема на $\mathbb{R}^2$.

5. Для задачи на условный экстремум функции $f(x,y) = x^2 + y^3$ при условии $x + y^2 = \frac{1}{4}$ найти стационарные точки функции Лагранжа и проверить в них достаточные условия локального условного экстремума второго порядка.

Ответ: для функции Лагранжа $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^3 + \lambda\left(x + y^2 - \frac{1}{4}\right)$ стационарные точки:
$\left(-\frac{3}{4}, -1, \frac{3}{2}\right)$ и $\left(\frac{3}{16}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{8}\right)$ — строгие локальные условные минимумы,
$\left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{2}\right)$ — строгий локальный условный максимум.

6. Применяя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл

$$\oint\limits_L x^2\,dz,$$

где кривая $L = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} 1 & = & y^2+z^2, \\ 1 & = & x+y+z \end{array} \right\}$ ориентирована положительно относительно вектора $(1,0,0)$.

Ответ: -2π.

7. Решить задачу Коши

$$y(x)y''(x) = y'(x)\left(y'(x)+1\right), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Ответ: $y(x) = \frac{1+2e^{3x}}{3}$.

8. В трёхмерном вещественном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом $e = \{ e_1 , e_2 , e_3 \}$ задано подпространство $M = \mathrm{Lin}\{ e_1 + e_2 - e_3 , e_1 - 2e_2 \}$. Найти базис в ортогональном дополнении $M^\perp$. Найти ортонормированный базис в M. Найти общий вид линейного преобразования пространства $\mathcal{E}$, ядро которого совпадает с M.

Ответ: $M^\perp = \mathrm{Lin}\{2e_1 + e_2 + 3e_3\}$, $g_1 = \frac{e_1+e_2-e_3}{\sqrt{3}}$ и $g_2 = \frac{4e_1-5e_2-e_3}{\sqrt{42}}$ — ОНБ в M, линейное преобразование $\mathcal{A}(xe_1 + ye_2 + ze_3) = (2x + y + 3z)a$ для любого нетривиального вектора $a \in \mathcal{E}$.

9. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\mathrm{Ln}\, z$ в комплексной плоскости с разрезом по вещественному лучу $[0, +\infty)$, такая, что $f(i) = \frac{\pi}{2} i$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_C \frac{f(z)}{\sin(\pi z)}\, dz \,,$$

где окружность $C = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z + 1| = \frac{1}{2} \right\}$ ориентирована против часовой стрелки.

Ответ: 2π.

10. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + t\sin(x - y), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R},$$

$$u|_{t=0} = x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $u(t, x, y) = \left(\frac{e^{-2t}}{4} + \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right)\sin(x - y) + x^2 + 2t$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

О Т В Е Т Ы

1. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\ln(\cos x) + x\sin x}{\sqrt[3]{1+x^4} - \sqrt{1-x^4}}\,.$$

Ответ: $-\frac{2}{5}$.

2. Исследовать на сходимость при всех значениях параметра $\alpha \neq 0$ несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \left(-\frac{x}{\ln x}\right)^{\alpha} dx\,.$$

Ответ: сходится при $0 < |\alpha| < 1$ и расходится при $|\alpha| \geq 1$.

3. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x+\sqrt{k}}{x+k^2}$$

на множествах $x \in (0,1)$, $x \in (1,+\infty)$.

Ответ: сходится равномерно на $(0,1)$ и сходится поточечно неравномерно на $(1,+\infty)$.

4. Пусть $\mathcal{L}$ — линейное пространство вещественных многочленов степени не выше первой. Пусть $\mathcal{A}$ — линейное преобразование пространства $\mathcal{L}$ вида

$$(\mathcal{A}x)(t) = x(0)t + x(1) \quad \forall\, x \in \mathcal{L}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Найти обратное преобразование $\mathcal{A}^{-1}$.

Ответ: $\left(\mathcal{A}^{-1}y\right)(t) = \Big(y(1) - y(0)\Big)\,(1-t) + y(0)t$.

5. В двумерном вещественном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом $e = \{\,e_1\,,\,e_2\,\}$ самосопряженное преобразование $\mathcal{A}$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу перехода к ортонормированному базису в $\mathcal{E}$, в котором матрица преобразования $\mathcal{A}$ имеет диагональный вид, вычислить матрицу преобразования $\mathcal{A}$ в этом базисе.

Ответ: $S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Функцию $f(x,y) = |x|y$ исследовать на дифференцируемость в $\mathbb{R}^2$.

Ответ: не дифференцируема в точках $(0,y)$ при всех $y \neq 0$ и дифференцируема в остальных точках $\mathbb{R}^2$.

7. Для задачи на условный экстремум функции $f(x, y) = 2x + y$ при условии $x^2 - y^2 = 1$ найти стационарные точки функции Лагранжа и проверить в них достаточные условия локального условного экстремума второго порядка.

Ответ: для функции Лагранжа $L(x, y, \lambda) = 2x + y + \lambda(x^2 - y^2 - 1)$ стационарные точки:
$\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ — строгий локальный условный максимум,
$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ — строгий локальный условный минимум.

8. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_G x\,dx\,dy,$$

где область $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x \ + y & > & 1, \\ x^2 + y & < & 1 \end{array} \right\}$.

Ответ: $\frac{1}{12}$.

9. Решить задачу Коши

$$y''(x) = y(x)\,y'(x), \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $y(x) = -\frac{2}{x+2}$.

10. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-|x|}$.

Ответ: $F[f](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{y^2+1}$.